Il matematico nell'irrazionale regno dei cristalli

Montagne, alberi, neve, decori ovunque, giochi, film, tavola imbandita e suoni d'organo raccontano l'inverno. A un matematico ricordano i numeri irrazionali più noti.

Sandra Lucente, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari Aldo Moro

D'inverno, il matematico sta su un pendolo che oscilla tra lavagna e scrivania, tra il concentrato studio di teoremi vecchi ma eterni e la scommessa di risultati nuovi che la comunità scientifica consegnerà forse alla storia. Ma ci sono sere in cui persino questo pendolo si ferma; e il pensiero, senza foglio e gesso, inizia a raccontare quel che vede con il linguaggio che conosce meglio. È la divulgazione in forma di *turismo matematico*, le suggestioni fuori dall'aula e dallo studio che confermano l'intuizione di Galileo: il mondo è un libro scritto in caratteri matematici. Negli ultimi anni, questo tipo di divulgazione ha portato nella direzione suggerita da Mandelbrot: «la matematica può essere usata non solo per informare, ma anche, soprattutto, per sedurre». Nei riferimenti bibliografici si riportano alcuni esempi di turismo matematico, che sono per lo più mappe di percorsi geometrici di bel tempo. Di contro, in questo articolo, ci lasciamo condurre in un qualunque paese delle Alpi alla scoperta della geometria invernale e dei numeri irrazionali.

Famosissimi, irrazionali, facili da trovare e disegnare

Dinanzi alla finestra un matematico in vacanza reggeva il disegno di sua figlia che rappresentava quel paesino. Le montagne come triangoli, la neve a cerchi, le case. Una, quadrata con il tetto spiovente triangolare. Le immancabili due finestre simmetriche rispetto all'apertura del portone che idealmente prolungata passava per il vertice del tetto. Il matematico guardò fuori dalla finestra: il disegno era davvero fedele! Chi aveva costruito la casa conosceva i segreti dei numeri reali e la Natura, che aveva preparato il paesaggio, si esprimeva raramente in frazioni. La mano della bimba conosceva dunque bene i *numeri irrazionali*: quelli che non sono esprimibili come rapporto (ratio) di due numeri interi. Questa definizione di numero irrazionale è praticamente inutilizzabile per esibire un esempio di numero irrazionale, a meno di raccontare una dimostrazione.

Il matematico notò che nel disegno – e nella casa di fronte – la diagonale del quadrato e la pendenza del tetto erano parallele. Questo avrebbe consentito a ogni studente del liceo di provare che il tetto aveva una pendenza di 45 gradi. Supponendo che il lato della casa valesse 2 (quadratini, metri, blocchi… non importa) la sagoma del tetto avrebbe avuto lato $\sqrt{2}$ per il ben noto teorema di Pitagora. Il grande matematico greco, però, non avrebbe mai voluto oltrepassare il portone di una siffatta casa. La sua scuola infatti era fondata sul concetto di numero inteso come numero intero o rapporto tra interi. Fu proprio un triangolo come il tetto del disegno a rive-

La matematica può essere usata non solo per informare, ma anche, soprattutto, per sedurre.

lare l'esistenza di segmenti incommensurabili, ovvero non rappresentabili mediante rapporto di interi. Mentre Ippaso moriva per aver rivelato questo, nasceva la matematica moderna, perché quel tetto rosso introduceva insieme gli irrazionali e il concetto di dimostrazione.

Un disegno semplice.

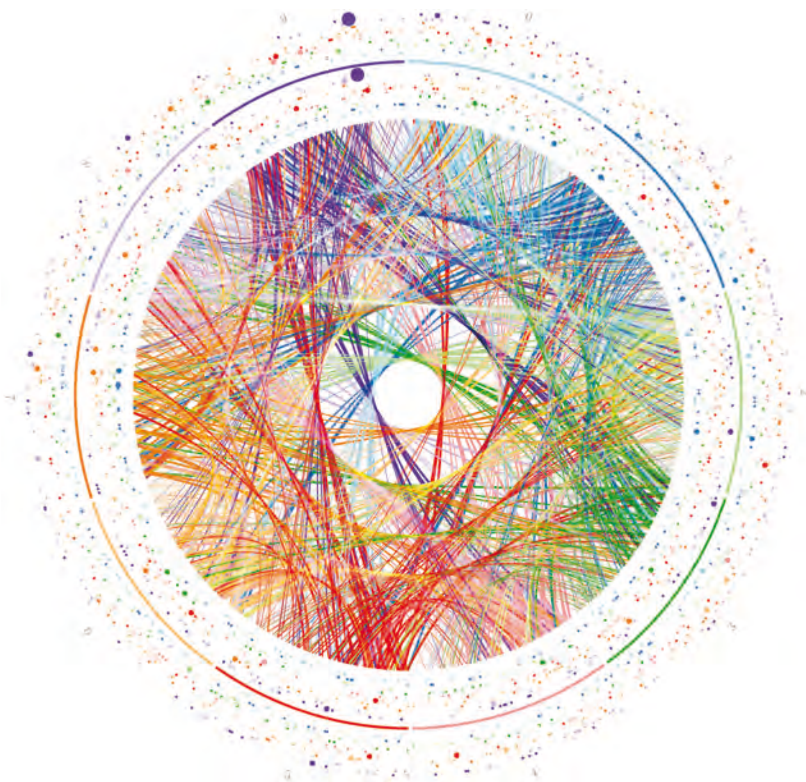
Come presentare un numero irrazionale senza usare la negazione di rapporto tra interi? Il matematico infreddolito riguardò il disegno; in mezzo alla neve c'erano dei piccoli tratti gialli, riverbero di stelle filanti già provate prima della mezzanotte. Iniziò a contare, chiamando 0 i cerchi-neve e 1 i rari tratti luminosi, il suo dito girovagava a caso nel disegno, ottenendo L = 0,1001000100001... (tra un 1 e l'altro ci sono prima due, poi tre, poi quattro zeri, e così via). Se fossero caduti infiniti fiocchi 0 e avessero scoppiettato infinite stelle filanti 1 si sarebbe creata una stringa in cui nessun tratto finito avrebbe potuto ripetersi contiguamente infinite volte. La più comoda rappresentazione degli irrazionali richiede una rappresentazione in una base. Ad esempio potremmo affermare che: nell'espansione decimale, i numeri irrazionali hanno una coda infinita e non periodica. Questa definizione pone alcuni problemi – per gli amanti dei dettagli matematici, il periodo nove va ridefinito, il periodo zero coincide con code finite, bisogna provare che la definizione resta invariata se si sceglie una base diversa – per evitarli si corregge la definizione utilizzando il formalismo delle serie numeriche, in un articolo divulgativo come questo, però, possiamo accontentarci di tale idea. Una volta accettata l'equivalenza delle definizioni, L è il più facile numero irrazionale da esibire.

Vi è una terza possibile definizione di numero irrazionale: mediante frazioni continue. I numeri razionali sono tutti e soli quelli che si possono scrivere in un castello di frazioni a numeratore 1 e con un numero finito di piani. Ad esempio:

$$\frac{5}{8} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

Quale numero si ottiene applicando all'infinito questa regola? Il matematico cercò il risultato nel foglio: lo trovò nella seconda casa e nella stella sull'abete. La stella a cinque punte era il simbolo dei pitagorici, chiamata pentagramma. Quando la disegniamo facciamo attenzione a tracciare il terzo segmento sul primo in modo che si dividano reciprocamente in sezione aurea. Un taglio di un segmento è in sezione aurea se crea due parti il cui rapporto coincide con il rapporto tra segmento intero e parte tagliata. Questo rapporto è φ, il magico numero irrazionale che si ottiene con una frazione continua in cui compaiono solo infiniti 1. In espansione decimale questa bellezza e questa certa irrazionalità si perde, infatti scriviamo φ = 1,618033988... Vediamo un inizio di coda che ci sembra solo molto confusa, né possiamo escludere che non si ripeta da un certo punto in poi. Nel disegno invece la bellezza di φ riappare nelle finestre della casa rettangolare. Su quella casa senza prospettiva poggia un probabile tetto triangolare aureo isoscele (avente base e lato in rapporto φ) su un rettangolo aureo (avente i due lati in rapporto φ). Le sue finestre sono divise in quadrati e rettangoli suggerendo una buona approssimazione del numero aureo.

Ancora orgoglioso di quel disegno così sfacciatamente pieno di numeri, il matematico concentrò lo sguardo sulla finestra della casa di fronte. Voleva forse controllare che avesse davvero proporzioni auree, ma qualcosa lo distrasse. I decori natalizi poggiati sul vetro gli ricordarono



Courtesy Martin Krzywinski - http://mkweb.bcgsc.ca/pi

le illustrazioni associate da Martin Krzywinski al numero π. Per costruire una di queste illustrazioni, si divide la circonferenza in dieci parti, e a ciascun settore si assegna una cifra nell'ordine da 0 a 9. Poi si tracciano fili che congiungono i settori seguendo l'ordine delle cifre del numero π = 3,14 159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328 23066470938446… L'effetto grafico è davvero bello e fa comprendere la complessità di questa coda decimale.

I disegni infantili contengono spesso π: per esempio, nel nostro paesaggio, il lago ghiacciato è rappresentato da un'ellisse, che chiama in causa questo numero quando si vuole calcolarne l'area e il perimetro. Più facile è spiegare cosa sia π per laghetti circolari: in tal caso rappresenta il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro.

La coda decimale di π sembrò da subito molto complicata, ma per la dimostrazione della sua irrazionalità i matematici dovettero aspettare il 1761 con il lavoro di Lambert. Gli antichi Greci non solo si chiedevano se π fosse irrazionale (ovvero se diametro e cerchio fossero commensurabili) ma si domandavano anche se con riga (non graduata) e compasso potessero costruire un quadrato della stessa area del cerchio. Il grande risultato della matematica dell'Ottocento non sta tanto nella dimostrazione dell'impossibilità di tale costruzione, quanto nell'equivalenza di questo problema con un altro problema di algebra: presi tutti i polinomi a coefficienti razionali, ce n'è almeno uno di cui questo numero è radice? I numeri per cui la risposta è no si dicono *irrazionali trascendenti,* i numeri per i quali la risposta è sì sono ovviamente tutti i razionali ma anche gli *irrazionali algebrici*.

Nel 1882 fu dimostrata la trascendenza di π, ovvero l'impossibilità di quadrare il cerchio. Il disegno che per primo produciamo nello sviluppo cognitivo è stato uno dei più complicati da studiare nella storia della matematica!

Cristalli e mele

Il matematico si fermò poi a guardare i tanti cerchi che sul disegno della bambina rappresentavano la neve. La neve era disegnata invece sotto forma di fiocchi stellati quando decorava l'albero di destra. Da vicino e da lontano il fiocco di neve cambia forma? Decise che avrebbe raccontato a sua figlia la costruzione di von Koch. All'inizio del Novecento Koch cercava una curva continua ma "mai differenziabile", cioè con infinite punte. Pensò di costruirla passo per passo, come quando si disegna un albero sovrapponendo parti uguali riscalate, della stessa forma ma più piccole o più grandi del passo precedente. Per disegnare un fiocco di neve usando l'idea di Koch si parte da una classica stella pentagonale. A ogni passaggio, basta prendere la precedente stella pentagonale, dividere ogni segmento disegnato in tre

I disegni infantili contengono spesso π.

parti e cancellarne le parti centrali sostituendole con una punta verso l'interno. La nuova figura ha moltissimi segmenti su ognuno dei quali si può rifare la costruzione. Ci si ferma quando la figura ottenuta (da noi o da un computer) somiglia a un fiocco di neve.

Per ottenere un vero fiocco matematico invece non ci si ferma mai! Dai precedenti esempi sembra chiaro che i processi infiniti sono legati sempre ai numeri irrazionali. Quale numero irrazionale aveva in mente il matematico dinanzi a un fiocco di neve? Ogni volta che si procede da un passo al successivo, si hanno quattro copie riscalate dei lati dopo aver diviso in tre parti. I matematici deducono da questo che il bordo del fiocco di neve ha una dimensione pari a ln(4)/ln(3). Questa misteriosa scrittura richiama il numero che è geometricamente legato all'iperbole: il numero di Nepero. Tale costante è indicata con la lettera *e*, iniziale del grande matematico Eulero che nel 1744 ne dimostrò l'irrazionalità. Le prime cifre decimali della coda di questo numero sono $e = 2{,}7182818284590...$ Dalla complessità di questa coda possiamo prevedere che si tratti di un numero trascendente. Questo è vero e come al solito la dimostrazione è costata tantissima fatica: è stata ottenuta solo nel 1873 da Hermite.

Quando si leggono, le dimostrazioni sono belle come certi oggetti di cristallo di Boemia. La nostra mente lavora sui concetti come la natura fa nella cristallizzazione: da cose più semplici ottiene cose complesse, ma il disordine diminuisce e la bellezza aumenta! Dall'acqua al fiocco di neve, dal silicio al vetro, dalle code decimali al metodo di esaustione, tutto sembra concorrere a questo processo.

La mente del matematico correlò i tentativi archimedei alle meravigliose incisioni artistiche sui boccali, le belle disposizioni degli atomi nei silicati al delicato merletto di ghiaccio che si appoggiava al bordo della finestra: ciò che è cristallino è in definitiva pieno di poligoni e poliedri regolari! Queste forme geometriche, che ci piacciono per la grande ricchezza di simmetria, nascondono molti numeri irrazionali nelle relative formule di area o perimetro (persino il pandoro ha per basi due ottagoni regolari che generano poi sezioni di esadecagoni concavi!). Ci piace riprodurre poligoni regolari e inserirli in circonferenze, come faceva Archimede calcolando le approssimazioni di π. Ci piace usare gli assi di simmetria di tali poligoni per creare stelle su calici, portafiori e coppe di cristallo, abbellire la tavola con figure costruibili con riga non graduata e compasso.

Il disegno che per primo produciamo nello sviluppo cognitivo è stato uno dei più complicati da studiare nella storia della matematica.

In quell'inverno tutto cercava di specchiarsi. La montagna nel laghetto del disegno, ma anche i singoli oggetti di cristallo riproducevano più volte gli oggetti attorno.

La propagazione dei raggi luminosi diviene complessa se il materiale di cui l'oggetto è composto non è un vetro purissimo. Il matematico abbassò lo sguardo e sorrise. Sull'albero di Natale a sinistra nel disegno vi erano superfici che ricordavano mele o stelle, in particolare erano superfici con rientranze. Analoghe forme si visualizzano studiando il fronte d'onda luminoso in un topazio. Si tratta di foliazioni di superfici di Fresnel in cristalli bi-assici. Ancora una volta, la natura utilizza gli irrazionali: si tratta infatti di una superficie quartica e per disegnarne le varie parti (noi o molto meglio un computer) è necessario utilizzare i radicali.

Fiocco pentagonale di von Koch.

Simmetrie su vetro (detto cristallo) di Boemia.

Questo gioco di equazioni differenziali aveva entusiasmato il matematico, che voleva però ora tornare a cose semplici. Contando le mele sull'albero, gli venne in mente di scrivere tutti i numeri naturali come le cifre decimali consecutive di un unico numero: M = 0,1234567891011… Ovviamente non riuscì a fermarsi! Mettendo in fila tutti i numeri interi, immaginando un albero di Natale infinito, le mele rimandavano alla coda di un numero irrazionale. Un semplice ragionamento per assurdo ci fa concludere infatti che M non può essere periodico. Questo numero è detto di Champernowne o di Mahler, che ne dimostrò la trascendenza nel 1937.

Matematica trascendente?

Il matematico decise allora di passeggiare a caccia di altri numeri irrazionali. Il turismo matematico invernale è decisamente faticoso, bisogna continuamente ripararsi in un museo o in una cattedrale. Entrò in una chiesa, ascoltò la musica, comprendendo che anche in quel caso, come spesso accade nella musica sacra, il "fortissimo" – il momento in cui il coro o l'orchestra suonano a tutta forza – coincide con il punto di sezione aurea della partitura. Del resto le onde sonore, come quelle luminose, non si risparmiano complicatissimi numeri irrazionali non algebrici come sin(n) con n numero intero. Oltre che all'immanente Natura, la matematica era stata data anche in prestito alla trascendenza? Non amava queste domande, e la sola questione filosofica che lo attraeva riguardava il momento in cui un matematico fa nascere o trova qualcosa di nuovo.

Ripensò al semplice esempio di numero irrazionale L. Nel 1844 Liouville esibì il primo numero trascendente proprio partendo da quell'idea semplice. Stavolta gli uno andavano sparsi tantissimo tra uno zero e l'altro (ovvero un uno ogni $n!$ (n – 1) zeri al variare di n). Doveva essere stato un momento incredibile nella sua vita scientifica, eppure aveva trovato solo qualcosa di comunissimo. Il matematico ripensò allora ai giochi di carte fatti in quei giorni. La probabilità, nei giochi natalizi, è sempre un numero razionale, anche se in nessun gioco si scommette mai su carte a probabilità uno. Perché i matematici scommettono invece

La nostra mente lavora sui concetti come la natura fa nella cristallizzazione: da cose più semplici ottiene cose complesse.

Cristalli di dolomite (© Didier Descouens-Wikimedia).

che $e + \pi$ sia irrazionale? Perché la probabilità di pescare un irrazionale tra i reali è addirittura uno: l'insieme dei razionali è di misura nulla. Anche l'insieme dei numeri algebrici è numerabile, quindi ha misura nulla, ovvero quasi tutti i numeri sono trascendenti! Ma dimostrare di aver vinto la scommessa anche su un solo numero è difficilissimo!

Conclusione

Il matematico tornò a casa, sua figlia si era addormentata mentre guardava il suo film preferito: *Frozen*. Rivide la scena in cui Elsa costruisce il castello di ghiaccio e tutte le forme e i numeri che aveva guardato quella sera si riproposero anche in quella creazione. La matematica non è meno imponente di questo castello ed è necessaria alla computer graphic usata per costruirlo. E come ognuno di noi sa che la costruzione di quel castello è molto più complessa del disegnino che ha guidato questo racconto, così i teorici dei numeri hanno trovato una buona definizione di misura di irrazionalità di un numero, con l'intento di "ordinare" i numeri irrazionali in ordine di complessità. Ovviamente è molto difficile passare dalla definizione generale al quantificare questo valore sui singoli numeri. Se potessimo assegnare davvero una misura di irrazionalità a ogni numero, sapremmo subito dire se si tratta di un razionale o di un irrazionale algebrico o di un comunissimo numero trascendente. Invece vi sono numeri che appaiono nelle applicazioni ma di cui sappiamo pochissimo. Non sappiamo se sia o meno razionale la costante di Eulero-Mascheroni, non sappiamo se siano trascendenti i valori della zeta di Riemann sui numeri dispari. Scommettiamo, scommettiamo a probabilità uno, ma non ci basta finché non forniremo una dimostrazione. Non sappiamo cosa accade nelle somme algebriche o nelle potenze di numeri trascendenti. Eppure sappiamo disegnare gli irrazionali fin da quando eravamo bambini. Se abbiamo imparato a tracciare e trovare una radice di 2, una sezione aurea, il π, i logaritmi semplicemente giocando con un disegno su un foglio, per fare matematica superiore non possiamo rinunciare a guardare in profondità.

Vi sono numeri che appaiono nelle applicazioni ma di cui sappiamo pochissimo.

Un disegno complesso.

Riferimenti bibliografici

E.B. Burger, R. Tubbs, *Making Transcendence Transparent*, Springer, New York 2004.

L. D'Alessio, S. Lucente, "Matera: a wonderfully chaotic city", *Proceeding of VIth Conference Diagnosis, Conservation and Valorization of Cultural Heritage*, 2015.

S. Lucente, *Itinerari matematici in Puglia*, Giazira Scritture, Noicattaro 2016.

C. Viola, "Gruppi di Permutazioni e risultati di irrazionalità", in *Atti del XVIII Congresso Unione Matematica Italiana (Bari, 24-29 Settembre 2007)*, 2007, pp. 211-236.

DOI: 10.12919/sapere.2017.06.1